TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Il est rappelé aux candidats :

— qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation, de la clarté et de la précision des démonstrations ;

— qu'ils doivent respecter les notations fixées par l'énoncé.

On note **C** le plan complexe, $z = x + iy$ un point quelconque de **C** ($x = \text{Re}\, z$ et $y = \text{Im}\, z$ sont réels), r le module de z et $\bar{z}$ le conjugué $x - iy$ de z.

Soit D le demi-plan $y > 0$ de **C**. Pour tout élément z de D, on pose $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Si F est une application de D dans **C**, on note, lorsqu'elles existent, $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdots$ les dérivées partielles de l'application $(x, y) \longmapsto F(x + iy)$ et $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \cdots$ les dérivées partielles de l'application $(r, \theta) \longmapsto F(re^{i\theta})$.

Toutes les fonctions considérées dans ce texte sont supposées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. Si f est une application de **R** dans **C**, on appellera $\mathfrak{T}$ la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\, dt < +\infty \quad .$$

Conformément à l'usage, **C**[X] désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans **C**. Un élément quelconque P de **C**[X] est noté $\Sigma\, p_j X^j$. Toutes les suites considérées dans le problème sont indexées dans **N** (ensemble des entiers naturels zéro compris).

I

Soit k l'application de D × **R** dans **R** définie par

$$k(z, t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right)$$

Si f est une application de **R** dans **C**, on note Kf l'application de D dans **C** définie par $Kf(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k(z,t)\, f(t)\, dt$, lorsque cette intégrale est convergente pour tout z appartenant à D.

a. Si f satisfait à $\mathfrak{T}$, démontrer que Kf existe, que Kf est indéfiniment continûment dérivable par rapport aux variables x et y et qu'on a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Kf = 0 \quad .$$

b. L'application f vérifiant toujours $\mathfrak{T}$, on la suppose continue au point t_0 de **R**; démontrer qu'on a :

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ y > 0}} Kf(z) = f(t_0) \quad .$$

II

a. Soit F une fonction définie dans le demi-plan $y \geqslant 0$ de $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose que F est continue, que sa restriction à D est holomorphe et que F vérifie $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ y \geqslant 0}} \dfrac{F(z)}{z} = 0$.

Démontrer que, pour tout z de D, on a

$$F(z) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} k(z, t)\, F(t)\, dt \quad .$$

b. Expliciter Kf pour $f(t) = \operatorname{Log} | t - \alpha |$, où α est un complexe arbitraire (on pourra d'abord supposer $\operatorname{Im} \alpha < 0$ et utiliser II *a.* en choisissant F de sorte qu'on ait $Re\ F(t) = \operatorname{Log} | t - \alpha |$ pour $t \in \mathbf{R}$).

Démontrer que, pour tout polynôme P à coefficients complexes et pour tout z non réel, on a :

$$(1) \qquad \operatorname{Log} | P(z) | \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{| y | \operatorname{Log} | P(t) |}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \; .$$

c. Pour quelles valeurs du réel σ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{| t |^{\sigma}}{1+t^2}\, dt$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de σ expliciter Kf lorsque f est la fonction $t \longmapsto | t |^{\sigma}$.

Vérifier en particulier qu'on a, pour tout r strictement positif, :

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\, | t |^{\sigma}}{r^2 + t^2}\, dt = c(\sigma)\, r^{\sigma}$$

et donner la valeur de $c(\sigma)$. $\Bigg($On pourra dans le cas $0 < \sigma < 1$ appliquer II *a.* à la fonction $z \longmapsto \left(\dfrac{z}{i}\right)^{\sigma} = r^{\sigma} e^{i\sigma\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}\Bigg)$.

III

a. On considère l'opérateur différentiel $\delta = x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y} = r \dfrac{\partial}{\partial r}$; $\delta \circ \delta$ est noté δ^2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $\mathfrak{L}$. Pour tout réel λ strictement positif, on note f_λ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$.

Démontrer qu'au sens de la convergence simple on a :

$$\delta^2 Kf = \lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda \neq 1}} \left[\frac{1}{(\lambda - 1)^2} K\left(f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f\right) \right]$$

b. Exprimer l'opérateur différentiel $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction de δ et $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $\mathfrak{L}$. On suppose que les deux fonctions $t \longmapsto f(e^t)$ et $t \longmapsto f(-e^t)$ sont convexes; démontrer qu'on a : $\dfrac{\partial^2 Kf}{\partial \theta^2} \leqslant 0$.

c. On suppose que f est une fonction paire vérifiant les hypothèses de III *b*. Démontrer que, pour tout r fixé strictement positif, la fonction $\theta \longrightarrow Kf(re^{i\theta})$ admet un maximum atteint pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

IV

Dans cette question,

- W désigne une application paire de $\mathbf{R}$ dans $[1, +\infty[$, vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} W(t)}{1+t^2} dt < +\infty$$

et telle que la fonction $t \longrightarrow \operatorname{Log} W(e^t)$ soit convexe; on pose pour tout r strictement positif $\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W(t)}{r^2+t^2} dt$ et, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, $M_j = \sup_{r>0} \frac{r^{j+\frac{1}{2}}}{e^{\mu(r)}}$.

- $P = \Sigma p_j X^j$ est un élément de $\mathbf{C}[X]$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|^2 (W(t))^{-1} dt \leqslant 1 \quad .$$

a. Prouver que, pour tout réel u et tout réel strictement positif v, on a :

$$uv \leqslant e^{u-1} + v \operatorname{Log} v$$

b. Démontrer l'existence d'un réel C indépendant de P et W tel que pour tout z non réel on ait

$$|P(z)| \leqslant C |y|^{-\frac{1}{2}} e^{\mu(r)}$$

On utilisera l'égalité

$$\operatorname{KLog}|P|\ (z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z,t) \operatorname{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}| dt + \frac{1}{2} \operatorname{KLog} W\ (z)$$

et on appliquera les résultats des questions II et III ainsi que l'inégalité IV*a*., où il est suggéré de remplacer u par $\operatorname{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}|$.

c. Déduire de IV*b*. l'existence d'un réel H, indépendant de P et W, tel que, pour tout j, on ait : $|p_j| \leqslant \frac{H}{M_j}$.

V

On désigne toujours par W une application satisfaisant aux hypothèses de IV. On suppose en outre que, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^j}{W(t)} = 0 \quad .$$

Les notations de IV sont conservées.

a. Démontrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes $P_n = \Sigma p_{n\,j} X^j$ satisfaisant aux conditions :

(i) P_n est de degré n

(ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t)\,P_n(t)\,(W(t))^{-1}\,dt = \delta_{m\,n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

b. Déduire de IV que, pour tout élément j de **N**, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\,p_{n\,j}\,|^2 \leqslant \left(\frac{H}{M_j}\right)^2$$

c. Soit (b_n) une suite complexe satisfaisant à : $\sum_0^{+\infty} |\,b_n\,|^2 < +\infty$.

Démontrer que la série $\sum_0^{+\infty} b_n\,P_n(z)$ est convergente dans **C** et que sa somme est une fonction entière de z (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe **C** tout entier).

d. Soit (a_j) une suite complexe satisfaisant à : $\sum_0^{+\infty} \left|\frac{a_j}{M_j}\right| < +\infty$.

Démontrer l'existence d'une suite unique (b_n) de complexes telle qu'on ait $\sum_0^{+\infty} |\,b_n\,|^2 < +\infty$ et que la fonction $f = \sum_0^{+\infty} b_n\,P_n$ vérifie pour tout j $\int_{-\infty}^{+\infty} t^j f(t)\,(W(t))^{-1}\,dt = a_j$.

VI

Dans cette question on note

- ρ un réel strictement positif et $\sigma = \frac{1}{\rho}$ son inverse;

- s^ρ l'ensemble des suites complexes (a_n) telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de la suite) pour lequel on a :

$$\sup_{n \geqslant 0} \left[c^{-n} n^{-\rho n}\,|\,a_n\,|\,\right] < +\infty$$

- S^ρ l'ensemble des applications f indéfiniment dérivables de **R** dans **C** telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de f) pour lequel on a :

$$\sup_{\substack{n \geqslant 0 \\ x \in \mathbf{R}}} \left[c^{-n}\,n^{-\rho n}\,|\,f^{(n)}(x)\,|\,\right] < +\infty$$

- W_A l'application de **R** dans **R** : $t \longmapsto W_A(t) = \exp\left(\frac{|\,t\,|}{A}\right)^\sigma$, associée à un réel A strictement positif quelconque $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$.

a. Soit g une application de **R** dans **C** satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,g(t)\,|^2\,(W_A(t))^{-1}\,dt < +\infty$$

Le nombre x étant réel, on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t)\,(W_A(t))^{-1}\,dt \quad .$$

Démontrer qu'on définit ainsi une application f de **R** dans **C**, qui est élément de S^ρ et qui, pour tout entier positif ou nul, satisfait à :

$$f^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) \left(W_A(t)\right)^{-1} dt$$

$\left(\text{on rappelle que } \Gamma(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt \right.$ et $\left(\frac{u}{e}\right)^u \sqrt{\frac{2\pi}{u}}$ sont équivalents lorsque u tend vers $\left. + \infty \right)$.

b. On suppose désormais $\rho > 1$. L'application W_A vérifie alors les hypothèses de IV et V.

Calculer

$$\mu_A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W_A(t)}{r^2 + t^2} dt \qquad \text{(utiliser II}c.\text{)}$$

Démontrer

$$M_j(A) = \sup_{r>0} \left[r^{j+\frac{1}{2}} \exp\left(-\mu_A(r)\right) \right] = \left[\gamma A \left(j + \frac{1}{2} \right)^\rho \right]^{j+\frac{1}{2}}$$

où γ est un nombre qu'on calculera.

c. Déduire de V*d.* que, pour tout élément (a_n) de s^ρ, il existe un élément f de S^ρ tel que, pour tout n, on ait : $f^{(n)}(0) = a_n$.

$\left(\text{On cherchera } f \text{ de la forme : } x \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) \left(W_A(t)\right)^{-1} dt \right.$, en choisissant A et g convenablement$\left.\right)$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

Le texte donné propose l'étude et la résolution d'un cas particulier du problème des moments :

- construire, (a_n) étant une suite donnée de nombres réels ou complexes, une fonction f qui satisfait pour tout n à condition $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = a_n$ et vérifie des inégalités du type

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} e^{|t|^\sigma} |f(t)| < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t|^\sigma} |f(t)| dt < +\infty ;$$

ou bien de façon équivalente

- construire, (α_n) étant une suite donnée, une fonction g indéfiniment dérivable qui satisfait pour tout n à la condition $g^{(n)}(0) = \alpha_n$ et dont les dérivées successives vérifient des inégalités données du type

$|g^{(n)}(t)| \leqslant C\, A^n\, n!^s$ pour tout t,

C, A et s étant des constantes données.

Les paragraphes I, II, III et IV sont des préliminaires, qui introduisent et permettent d'utiliser la méthode du majorant harmonique.